## Day1 PM 计数原理 群论

###### P4.容斥原理(Principle of Inclusion-Exclusion)

**公式：**

**也可表示为 设S为有限集，，则**

由于

所以

###### P10.第一类斯特灵数(Stirling数)

**定义：**或表示把n个不同的元素划分成k个圆排列的方案数。同时还分为无符号第一类Stirling数和带符号第一类Stirling数。

**递推公式：**

考虑前n-1个物品已经分好了，则第n个物品要么单独一个环，要么插在之前k个环中的任意n-1个元素后。

###### P13.第二类斯特灵数(Stirling数)

**定义：**或表示把n个不同的元素划分成k个集合的方案数。集合内是不考虑次序的，而圆排列是有序的。常用于解决组合数学中几类放球模型。

第二类Stirling数要求盒子是无差别的，所以可以得到其方案数公式：

**递推公式：**

**S**

考虑前n-1个物品已经分好了，则第n个物品要么单独一个作为一个集合，要么插在之前k个集合中中的某一个。

###### P19.DP of DP(DP套DP)

在原 DP 的基础上暴力加上一维来记录每个状态的 DP 值, 并统计这种情况下的方案数。(？)

###### P24.置换(Permutation) 置换群(Permutation Group)

**置换**

**置换.定义：**设是一个从集合到自身的一一映射，则可称为置换，形如：

其中a是一个排列。

**置换.性质：**置换可以做乘法，如 。

群论入门：<http://blog.csdn.net/xym_CSDN/article/details/53456447> (不细整理了)

**群**

**阶：**G中所含元素的个数，称为群G的阶，记为，即G中所含元素的个数。

因此G可根据是否为分为有限群和无限群。（G中的元素亦有阶的定义）

**性质1：封闭性：**。

**性质2：结合律：** 。

**3.存在单位元：**。

如果G是加法群时，G中的单位元换叫做“零元”，记为0.

**4.在群中，每个元素都有逆元，且左逆元=右逆元：**。

在这种情况下可以把y写成 。

如果G是加法群时，x逆元改叫做“负元”，并记作-x。

**陪集**

设H是群G的子群，对于，表示H的一个左陪集，记作aH；

表示H的一个右陪集，记作Ha。

**注：**下面的；证明见上边网址blog。

**性质1. H中任意陪集的大小（元素个数）相等，都等于。**

**性质2.**

**性质3.**

**性质4.**

**性质5. ，即对于G的子群H，H的任意两个左/右陪集要么相等，要么不相交。**

**性质6.**

**相关定理**

**拉格朗日定理：**

**设H是有限群G的子群，则 （H的阶整除G的阶）。**

**轨道-稳定集定理：**

**设G是[1,n]上的一个置换群，是[1,n]在G的作用下包括k的等价类，是使k不动的置换类，有。**

具体来说，k是目标集[1,n]上的一个位置，包含k的等价类就是k通过G中的置换能得到的所有位置，就是置换 的集合，要求k在经过置换f的作用后仍为k。

我们称为k的轨道，为k的稳定化子。

**简单说，就是 轨道大小\*稳定化子数=变换个数。**

**P26.Burnside引理：**

设 是目标集[1,n]上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。

是在置换的作用下不动点的个数，也就是长度为1的循环的个数。通过上述置换的变换后可以相等的元素属于同一个等价类。若G将[1,n]划分成L个等价类，则等价类个数L为：

**证明：**先考虑这个等价类L的概念，实际上就是[1,n]在群G的作用下不等价元素的个数。形象的说，我们可以把[1,n]看成n个点，而G中的置换相当于一些有向边，即n中点中每个点都会发出 条边，如果把图上的重边去掉，而L就是该图上的连通块数（实际上就是[1,n]上互不相交的循环个数），而每个连通块 的大小实际上就是 ，所以每个点k对答案的贡献就是 ，即

由轨道-稳定集定理的

由定义易得

该引理得证。

若[1,n]中各元素完成置换并判断是否相等的复杂度是，那么使用burnside引理求等价类的复杂度是。

**P26.Polya定理(Pólya Enumeration Theorem ,PET)：**

设 是目标集[1,n]上的置换群。每个置换都写成不相交循环的乘积。

是在置换的作用下循环节的个数，通过上述置换的变换后可以相等的元素属于同一个等价类。若G将[1,n]用k中颜色分别进行染色，然后划分成L个等价类，则染色后的等价类个数L为：

注意：burnside引理中的群是针对染色方案，而Polya定理则是针对染色对象。（详见blog）

**证明：**我们称原先的群G为G’,原先的f为f’。考虑如何用f计算出，我们发现用循环乘积来表示的f中，每一个循环中的元素一定是同一个颜色，这样才能保证每次置换前后是同一等价类，所以实际上用k种颜色来染色的方案数就是 。

又因为，所以定理得证。

这样的话就不用再枚举所有的染色方案了，时间复杂度为。

**ps：1.**如果染色x在f的作用下不变，那么每个轮换（循环）中的元素都必须染同种颜色。

**2.**当染色次数有限制时，我们就不能直接套Polya定理了，但可以套用一些思路，对于求解过程中的一个置换来说，想让置换后染色方案不变，就可以让属于同一循环的染色对象颜色相同，这个时候一般用到多重集合排列或DP。